Spezielle Beobachtungen zur Geometrie des Oktaeders

Robert Resel

Einleitung

Ist man aus bestimmten Gründen (etwa bei der Konstruktion zugeordneter Hauptrisse im GZ- oder DG-Unterricht, oder auch zwecks Beispielen zur Analytischen Geometrie in der 6. Klasse mit "schönen Ergebnissen") an Oktaedern im räumlichen cartesischen Koordinatensystem (Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ für den gesamten Artikel vorausgesetzt!) interessiert, deren Eckpunkte allesamt Gitterpunkte sind und welche das Zeichenblatt (im Falle des GZ- und DG-Unterrichts, wobei aber selbst für den Mathematikunterricht in der 6. Klasse parallelisierte konstruktive Verfahren der räumlichen Geometrie denkbar wären, vgl. dazu [7]!) nicht "sprengen" sollen, so stellt sich die Frage nach einer Parametrisierung entsprechender Aufgabenstellungen.

Nützt man nun die Eigenschaft aus, dass die konvexe Hülle der Mittelpunkte der Begrenzungsquadrate eines Würfels ein Oktaeder bildet, braucht man somit nur noch eine Parametrisierung für entsprechende Würfel, was in natürlicher Weise auf (Vielfache) orthogonale(r) Matrizen aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ ("*Gruppe O_3 der orthogonalen Matrizen*") führt, deren Parametrisierung (hier!) aber nicht unsere Aufgabe sein soll.[1] Vielmehr wollen wir uns in diesem Artikel mit einer speziellen Teilmenge der O_3 beschäftigen, welche hinsichtlich unseres Anliegens bezüglich Oktaeder so manche überraschende (geometrische) Eigenschaft bereithält, worauf das Beispiel der Oktaeder[2]

Oktaeder $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$: $A_1(1|5|10)$, $B_1(9|10|13)$, $C_1(13|9|4)$, $D_1(5|4|1)$, $E_1(10|1|9)$, $F_1(4|13|5)$

Oktaeder $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$: $A_2(1|10|5)$, $B_2(4|5|13)$, $C_2(13|4|9)$, $D_2(10|9|1)$, $E_2(5|1|4)$, $F_2(9|13|10)$

einen ersten Vorgeschmack bieten soll (vgl. dazu auch Fig. 1 im Euklid-Anhang!).

Auffällige Beziehungen sowohl zwischen den jeweils 18 beteiligten Koordinaten eines der beiden Oktaeder als auch zwischen allen 36 insgesamt auftauchenden Koordinaten beider Oktaeder lassen bereits einige Merkwürdigkeiten erkennen, zu welchen sich durch eine zugeordnete Grund-Aufrissdarstellung (wofür abermals auf Fig. 1 verwiesen wird!) der beiden Oktaeder noch weitere Beobachtungen dazugesellen, welche im Folgenden genauer analysiert werden sollen.

[1] Entsprechende Zugänge zu Eulers bekannter Parametrisierung der O_3 findet man mit bzw. ohne Zuhilfenahme des Schiefkörpers $\mathbb{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen in [1] oder [2] bzw. in [4]!

[2] Dabei setzt sich das Oktaeder $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ aus den am Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ identifizierten Pyramiden $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_1B_1C_1D_1F_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2E_2$ und $A_2B_2C_2D_2F_2$ zusammen (was bekanntlich nur eine von drei derartigen Betrachtungsweisen darstellt, vgl. dazu etwa [5])!

Eine spezielle Matrix

Der "Ursprung" der oben angesprochenen speziellen Teilmenge der O_3 befindet sich in Aufgabe 15 auf S. 12 des Lehrwerks [3], in welcher zu zeigen ist, dass jeder Vektor der Bauart $\vec{x}_n = (n|n+1|n(n+1))$ für ganzzahliges n auch ganzzahligen Betrag aufweist, was wegen

$$||\vec{x}_n|| = \sqrt{n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2} = \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}$$

nach der Umformung

$$||\vec{x}_n|| = \sqrt{n^2 \left[\left(n^2 + \frac{1}{n^2} \right) + 2 \left(n + \frac{1}{n} \right) + 3 \right]}$$

und der (zur Faktorisierung symmetrischer Polynome - wie wir gleich sehen werden - ziehführenden!) Substitution[3]

$$z = n + \frac{1}{n}$$

auf

$$||\vec{x}_n|| = \sqrt{n^2(z^2 - 2 + 2z + 3)} = n\sqrt{z^2 + 2z + 1} = n(z+1)$$

bzw. durch Rücksubstitution auf

$$||\vec{x}_n|| = n \left(n + \frac{1}{n} + 1 \right),$$

ergo

$$||\vec{x}_n|| = n^2 + n + 1$$

führt.
Damit ist gezeigt, dass jeder Vektor $\vec{x}_n$ der Bauart $\vec{x}_n = (n|n+1|n(n+1))$ für ganzzahliges n auch ganzzahligen Betrag (nämlich $n^2 + n + 1$) hat.

Um nun zu der angekündigten speziellen Teilmenge der O_3 zu gelangen, stellen wir fest, dass eben berechneter Betrag von Vektoren erwähnter Bauart sowohl gegenüber Permutationen der Komponenten sowie Vorzeichenwechsel der Komponenten invariant ist und betrachten hiefür paradigmatisch ein diesen Sachverhalt widerspiegelndes Vektortripel, welches wir zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

zusammenfassen. Der erste Spaltenvektor von A ist ein Vektor erwähnter Bauart ($\vec{x}_2$!), der zweite und der dritte Spaltenvektor sind durch bestimmte Permutationen und Vorzeichenwechsel des ersten Spaltenvektors entstanden. Da alle drei Spaltenvektoren gleichen Betrag ($7 = 2^2 + 2 + 1$) haben und noch dazu paarweise aufeinander normal stehen, ist A somit das Siebenfache einer orthogonalen Matrix, was uns in Verallgemeinerung dieses Beispiels für $n = 2$ auf folgenden Satz führt:

[3] Vgl. dazu etwa [6]!

Satz 1. Es sei $t \in \mathbb{R}$. Dann ist die Matrix

$$M = \frac{1}{t^2+t+1} \cdot \begin{pmatrix} t & t(t+1) & -(t+1) \\ t+1 & t & t(t+1) \\ t(t+1) & -(t+1) & -t \end{pmatrix}$$

stets orthogonal.

Beweis. Verläuft elementar, indem man für die Spaltenvektoren $\vec{z_i},\ 1 \leq i \leq 3$ die Beziehung(en) $\vec{z_i} \cdot \vec{z_j} = \delta_{ij}$ nachweist.

Dass die auf diesem Wege parametrisierte Teilmenge der O_3 bezüglich der Matrizenmultiplikation keine Untergruppe letzterer bildet, zeigt das

Gegenbeispiel

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -4 & 16 & 13 \\ 19 & 8 & -4 \\ -8 & 11 & -16 \end{pmatrix},$$

welches bereits das Gruppenaxiom der Abgeschlossenheit verletzt.

Um Satz 1 nun gewinnbringend zur Erzeugung von Oktaedern mit “Gittereckpunkten“ verwenden zu können, benutzen wir (weil ja die Oktaedereckpunkte wie schon bemerkt die Mittelpunkte der Begrenzungsquadrate eines Würfels sind) die Parametrisierung

$P(0|0|0),\ Q(2n|2(n+1)|2n(n+1)),\ R,\ S(2n(n+1)|2n|-2(n+1)),\ T(-2(n+1)|2n(n+1)|-2n),\ U,\ V,\ W$

des Würfels $PQRSTUV$.

$$\text{Der Eckpunkt} \left\{\begin{matrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \end{matrix}\right\} \text{des Oktaeders } A_0B_0C_0D_0E_0F_0 \text{ sei nun der Mittelpunkt des Quadrats} \left\{\begin{matrix} PQUT \\ QRVU \\ SRVW \\ PSWT \\ PQRS \\ TUVW \end{matrix}\right\}.$$

A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 und F_0 sind somit in folgender Weise als Linearkombinationen von Q, S und T darstellbar:

$$A_0 = \frac{1}{2}(Q+T),\ B_0 = \frac{1}{2}(2Q+S+T),\ C_0 = \frac{1}{2}(Q+2S+T),\ D_0 = \frac{1}{2}(S+T),\ E_0 = \frac{1}{2}(Q+S),\ F_0 = \frac{1}{2}(Q+S+2T)$$

Einsetzen obiger Parametrisierung des Würfels $PQRSTUVW$ liefert dann die Parametrisierung

$$A_0(-1|(n+1)^2|n^2),\ B_0(n^2+2n-1|n^2+4n+2|2n^2-1),\ C_0(2n^2+2n-1|n^2+4n+1|n^2-2n-2),$$

$$D_0(n^2-1|n^2+2n|-2n-1),\ E_0(n^2+2n|2n+1|n^2-1),\ F_0(n^2-2|2n^2+4n+1|n^2-2n-1)$$

des Oktaeders $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$.

Damit die zugeordneten Grund- und Aufrisse derartiger Okateder nicht überlappen (was genau dann gewährleistet sein wird, wenn sämtliche $x-$ und $z-$Koordinaten nicht-negativ sind) und ferner keine "unnötig großen" $y-$Koordinaten aufweisen, translatieren wir das Oktaeder $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ noch durch den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2n \\ 2n+2 \end{pmatrix}$$

und erhalten auf diesem Wege ein neues Oktaeder $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, welches für jede ganze Zahl n (ausgenommen -1 und 0) vollständig im ersten Oktanten $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ liegt:

$$A_1(1|n^2+1|(n+1)^2+1),\ B_1((n+1)^2|(n+1)^2+1|2n^2+2n+1),\ C_1(2n^2+2n+1|(n+1)^2|n^2),$$
$$D_1(n^2+1|n^2|1),\ E_1((n+1)^2+1|1|(n+1)^2),\ F_1(n^2|2n^2+2n+1|n^2+1)$$

Schreibt man die Eckpunkte in der algebraisch äquivalenten Form

$$A_1(1|n^2+1|(n+1)^2+1),\ B_1((n+1)^2|(n+1)^2+1|n^2+(n+1)^2),\ C_1(n^2+(n+1)^2|(n+1)^2|n^2),$$

$$D_1(n^2+1|n^2|1),\ E_1((n+1)^2+1|1|(n+1)^2),\ F_1(n^2|n^2+(n+1)^2|n^2+1)$$

an, so läßt sich durch genauere Betrachtung der parametrisierten Koordinaten des Oktaeders $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ folgender Satz formulieren:

Satz 2. Es sei $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$ und ferner das Zahlenpaar $(x_1|x_2) = (n^2|(n+1)^2)$ gegeben. Dann bildet die konvexe Hülle der Punkte $A_1(1|x_1+x_2|x_2+1)$, $B_1(x_2|x_2+1|x_1+x_2)$, $C_1(x_1+x_2|x_2|x_1)$, $D_1(x_1+1|x_1|1)$, $E_1(x_2+1|1|x_2)$ und $F_1(x_1|x_1+x_2|x_1+1)$ ein Oktaeder, welches vollständig im ersten Oktanten liegt.

Betrachtet man nun die jeweils insgesamt 18 "Koordinaten" der beiden Oktaeder aus der Einleitung, so fällt einem auf, dass es sich bei ihnen nur um sechs Zahlen handelt, die jeweils dreifach auftreten, und zwar genau einmal pro Koordinate und nur maximal einmal pro Eckpunkt. Es erwies sich als bei einigen (begabten) Schülern durchaus interessantes Experiment, diese beiden Oktaeder im GZ-Unterricht vorzulegen und die SchülerInnen selbst entdecken zu lassen, was soeben im letzten Satz erläutert wurde, bzw. noch mehr: Bei genauerer Betrachtung erkennt man z.B. auch noch, dass je zwei "gegenüberliegende" Punkte (Von jedem Eckpunkt eines Oktaeders führen vier Kanten zu *vier anderen Eckpunkten*, übrig bleibt ein Eckpunkt, welcher dann zusammen mit dem in Rede stehenden Punkt die Spitzen **jener beiden Pyramiden** bildet, deren nicht zur Oberfläche zählendes gemeinsames Basisquadrat von den *vier anderen Eckpunkten* gebildet wird und **welche** das gesamte Oktaeder generieren.) insgesamt alle sechs vorkommenden Zahlen genau einmal als Koordinate besitzen.

"Duale" Oktaeder

Um nun mittels der Parametrisierung aus Satz 2 allgemein zu untersuchen, wie man aus einem Oktaeder wie dem Oktaeder 1 das (im Folgenden als) "duale" (bezeichnete) Oktaeder 2 erhält, dessen Eckpunkte lediglich durch Permutationen der Koordinaten der Eckpunkte des Oktaeders 1 entstehen, stellen wir zunächst fest, dass die konkreten Oktaeder 1 und 2 aus der Einleitung durch Wahl der Parameter $n_1 = 2$ bzw. $n_2 = -3$ hervorgegangen sind und überlegen nun allgemein, dass eine Permutation der sechs vorkommenden Koordinaten (1, x_1, $x_1 + 1$, x_2, $x_2 + 1$, $x_1 + x_2$) nur durch eine Permutation des generierenden Zahlenpaars $(x_1|x_2)$ möglich ist. Da (bis auf die identische Abbildung) nur eine derartige Permutation existiert, müssen für die Parameter m und n zweier "dualer" Oktaeder die Gleichungen

$$n^2 = (m+1)^2 \text{ sowie } m^2 = (n+1)^2$$

gelten, woraus man [etwa durch Betrachtung der beiden Gleichungen im cartesischen $(m,n)-$Koordinatensystem, in welchem sie die beiden Geradenpaare $(m+1+n=0,\ m+1-n=0)$ bzw. $(n+1-m=0,\ n+1+m=0)$ darstellen] die fundamentale Gleichung $\boxed{m+n=-1}$ erhält (welche am obigen Beispiel exemplifiziert $2-3=-1$ bedeutet).

Wendet man auf den Parameter n des Oktaeders $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ aus Satz 2 in der letzten Darstellungsweise vor Satz 2 die Abbildung $n \mapsto m = -1-n$ an, so gelangt man zum "dualen" Oktaeder

$$A_2(1|(n+1)^2+1|n^2+1),\ B_2(n^2|n^2+1|n^2+(n+1)^2),\ C_2(n^2+(n+1)^2|n^2|(n+1)^2),$$

$$D_2((n+1)^2+1|(n+1)^2|1),\ E_2(n^2+1|1|n^2),\ F_2((n+1)^2|n^2+(n+1)^2|(n+1)^2+1),$$

welches für $n = 2$ gerade das Oktaeder 2 aus der Einleitung liefert.

Die "Dualabbildung"

Jetzt wollen wir uns überlegen, welche geometrische Bedeutung der Übergang von einem Oktaeder zu seinem dualen Oktaeder (i.f. kurz "Dualabbildung" genannt) hat, wozu wir zunächst feststellen, dass jedes aus einem entsprechenden Zahlenpaar $(x_1|x_2) = (n^2|(n+1)^2)$ via Satz 2 generierte Oktaeder und sein duales Oktaeder den gemeinsamen Mittelpunkt $M(n^2+n+1|n^2+n+1|n^2+n+1)$ (gegenüberliegender Eckpunkte wie A_i und C_i, B_i und D_i und schließlich E_i und F_i) besitzen. Zusammen mit der durch (mit dem dynamischen Geometrieprogramm EUKLID erstellten) Figur 1 suggerierten Vermutung, dass es sich bei der Dualabbildung um eine Drehung um eine Achse a um einen bestimmten Drehwinkel (welcher von n abhängt, wobei dieser Drehwinkel für $n = -\frac{1}{2}$ exakt $0°$ betragen muss, weil dann das Oktaeder zu sich selbst dual ist) handelt, ist schon einmal klar, dass M mit a inzidiert. Zur Ermittlung der vermuteten Drehachse a brauchen wir nur die Symmetralebenen zweier durch die Dualabbildung gekoppelter Punktepaare (z.B. A_1 und A_2 sowie B_1 und B_2) miteinander zu schneiden, wozu es wegen der bereits bekannten Inzidenz $M \in a$ reicht, den Richtungsvektor von a als vektorielles Produkt zweier beliebiger Normalvektoren der beiden Ebenen zu berechnen:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2n+1 \\ -(2n+1) \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -(2n+1) \\ -(2n+1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Drehachse a, woran man einerseits erkennt, dass der Grund- und der Aufriss von a in zugeordneten Hauptrissen zueinander parallel verlaufen (vgl. dazu – als Erweiterung von Fig. 1! – auch Fig. 2!) und woraus man andererseits schließt, dass dieser Richtungsvektor gleichzeitig Normalvektor für die zueinander parallelen Trägerebenen jener Bahnkreise ist, auf welchen sich die Eckpunkte des ersten Oktaeders bei der (vermuteten) Drehung in sein duales Oktaeder bewegen. Dazu legen wir entsprechende Normalebenen α_1, β_1, χ_1, δ_1, ε_1 und φ_1 durch A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und F_1 sowie analog Normalebenen α_2, β_2, χ_2, δ_2, ε_2 und φ_2 durch A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 und F_2, was uns

$$\alpha_1 : -x+y+z = 2(n^2+n+1) \text{ bzw. } \alpha_2 : -x+y+z = 2(n^2+n+1),$$

$$\beta_1 : -x+y+z = 2(n^2+n+1) \text{ bzw. } \beta_2 : -x+y+z = 2(n^2+n+1),$$

$$\chi_1 : -x+y+z = 0 \text{ bzw. } \chi_2 : -x+y+z = 0,$$

$$\delta_1 : -x+y+z = 0 \text{ bzw. } \delta_2 : -x+y+z = 0,$$

$$\varepsilon_1 : -x+y+z = 0 \text{ bzw. } \varepsilon_2 : -x+y+z = 0$$

und schließlich

$$\varphi_1 : -x+y+z = 2(n^2+n+1) \text{ bzw. } \varphi_2 : -x+y+z = 2(n^2+n+1)$$

liefert, woraus wir erkennen, dass die Dreiecke $\Delta A_1B_1F_1$ und $\Delta A_2B_2F_2$ einerseits und die Dreiecke $\Delta C_1D_1E_1$ und $\Delta C_2D_2E_2$ andererseits jeweils gemeinsam in einer Normalebene auf a liegen. Da all diese vier Dreiecke aufgrund der Geometrie des Oktaeders gleichseitig sind, fallen die entsprechenden Umkreismittelpunkte mit den zugehörigen Schwerpunkten zusammen, woraus aufgrund der vektoriellen Schwerpunktformel folgt, dass der Mittelpunkt jenes Bahnkreises, auf welchem sich das Dreieck $\Delta A_1B_1F_1$ bei seiner Drehung um a in das Dreieck $\Delta A_2B_2F_2$ bzw. das Dreieck $\Delta C_1D_1E_1$ bei seiner Drehung um a in das Dreieck $\Delta C_2D_2E_2$ bewegt, durch

$$\underbrace{S_{\Delta A_1B_1F_1} = S_{\Delta A_2B_2F_2}}_{=:S_{\Delta ABF}} \left(\frac{2}{3} \cdot (n^2+n+1) \Big| \frac{4}{3} \cdot (n^2+n+1) \Big| \frac{4}{3} \cdot (n^2+n+1) \right)$$

bzw.

$$\underbrace{S_{\Delta C_1D_1E_1} = S_{\Delta C_2D_2E_2}}_{=:S_{\Delta CDE}} \left(\frac{4}{3} \cdot (n^2+n+1) \Big| \frac{2}{3} \cdot (n^2+n+1) \Big| \frac{2}{3} \cdot (n^2+n+1) \right)$$

gegeben ist.

Zur Berechnung des zugehörigen Drehwinkels λ ermitteln wir die sechs Winkel α, β, χ, δ, ε sowie φ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{S_{\Delta ABF}A_1}$ und $\overrightarrow{S_{\Delta ABF}A_2}$, $\overrightarrow{S_{\Delta ABF}B_1}$ und $\overrightarrow{S_{\Delta ABF}B_2}$, $\overrightarrow{S_{\Delta CDE}C_1}$ und $\overrightarrow{S_{\Delta CDE}C_2}$, $\overrightarrow{S_{\Delta CDE}D_1}$ und $\overrightarrow{S_{\Delta CDE}D_2}$, $\overrightarrow{S_{\Delta CDE}E_1}$ und $\overrightarrow{S_{\Delta CDE}E_2}$ sowie $\overrightarrow{S_{\Delta ABF}F_1}$ und $\overrightarrow{S_{\Delta ABF}F_2}$ und zeigen deren Übereinstimmung:

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta ABF}A_1} = \begin{pmatrix} -2n^2 - 2n + 1 \\ -n^2 - 4n - 1 \\ -n^2 + 2n + 2 \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} 2n^2 + 2n - 1 \\ n^2 + 4n + 1 \\ n^2 - 2n - 2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} p+q \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta ABF}A_2} = \begin{pmatrix} -2n^2 - 2n + 1 \\ -n^2 + 2n + 2 \\ -n^2 - 4n - 1 \end{pmatrix} \quad \| \quad \begin{pmatrix} 2n^2 + 2n - 1 \\ n^2 - 2n - 2 \\ n^2 + 4n + 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} p+q \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{p^2 + 4pq + q^2}{2(p^2 + pq + q^2)} = 1 - \frac{p^2 - 2pq + q^2}{2[(p+q)^2 - pq]} = 1 - \frac{(p-q)^2}{2[(p+q)^2 - pq]}$$

bzw.

$$\cos\alpha = 1 - \frac{(6n+3)^2}{2(4n^4 + 8n^3 - 4n + 1 - n^4 - 2n^3 + 6n^2 + 10n + 2)}$$

bzw.

$$\cos\alpha = 1 - \frac{9(2n+1)^2}{6(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1)} \quad (*)$$

Entsprechend gilt (wobei wir im Folgenden die bei der Berechnung von $\cos\alpha$ definierten Parameter p und q weiterverwenden!):

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta ABF}B_1} = \begin{pmatrix} n^2 + 4n + 1 \\ -n^2 + 2n + 2 \\ 2n^2 + 2n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \\ p+q \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta ABF}B_2} = \begin{pmatrix} n^2 - 2n - 2 \\ -n^2 - 4n - 1 \\ 2n^2 + 2n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -p \\ p+q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{p^2 + 4pq + q^2}{2(p^2 + pq + q^2)} \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha$$

Ferner:

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta CDE}C_1} = \begin{pmatrix} 2n^2 + 2n - 1 \\ n^2 + 4n + 1 \\ n^2 - 2n - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta CDE}C_2} = \begin{pmatrix} 2n^2 + 2n - 1 \\ n^2 - 2n - 2 \\ n^2 + 4n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ q \\ p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\chi = \frac{p^2 + 4pq + q^2}{2(p^2 + pq + q^2)} \quad \Rightarrow \quad \chi = \alpha$$

Dann:

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta CDE}D_1} = \begin{pmatrix} -n^2 - 4n - 1 \\ n^2 - 2n - 2 \\ -2n^2 - 2n + 1 \end{pmatrix} \| \quad \begin{pmatrix} n^2 + 4n + 1 \\ -n^2 + 2n + 2 \\ 2n^2 + 2n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \\ p+q \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta CDE}D_2} = \begin{pmatrix} -n^2+2n+2 \\ n^2+4n+1 \\ -2n^2-2n+1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} n^2-2n-2 \\ -n^2-4n-1 \\ 2n^2+2n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -p \\ p+q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\delta = \frac{p^2+4pq+q^2}{2(p^2+pq+q^2)} \quad \Rightarrow \quad \delta = \alpha$$

Außerdem:

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta CDE}E_1} = \begin{pmatrix} -n^2+2n+2 \\ -2n^2-2n+1 \\ n^2+4n+1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} n^2-2n-2 \\ 2n^2+2n-1 \\ -n^2-4n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p+q \\ -p \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta CDE}E_2} = \begin{pmatrix} -n^2-4n-1 \\ -2n^2-2n+1 \\ n^2-2n-2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} n^2+4n+1 \\ 2n^2+2n-1 \\ -n^2+2n+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p+q \\ -q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varepsilon = \frac{p^2+4pq+q^2}{2(p^2+pq+q^2)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \alpha$$

Schließlich:

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta ABF}F_1} = \begin{pmatrix} n^2-2n-2 \\ 2n^2+2n-1 \\ -n^2-4n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p+q \\ -p \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{S_{\Delta ABF}F_2} = \begin{pmatrix} n^2+4n+1 \\ 2n^2+2n-1 \\ -n^2+2n+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p+q \\ -q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{p^2+4pq+q^2}{2(p^2+pq+q^2)} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha$$

Damit wäre die Übereinstimmung der Winkel gezeigt. Mehr noch folgen aus diesen Berechnungen ferner diverse anhand von Fig. 2 ersichtliche Eigenschaften, auf welche im Rahmen des Ausblicks noch hingewiesen wird.

Nach den Vorüberlegungen zu Satz 1 gilt $n^4+2n^3+3n^2+2n+1 = (n^2+n+1)^2$, woraus folgt, dass $(*)$ auch als $\cos\alpha = 1 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{n^2+n+1}\right)^2$ $(**)$ darstellbar ist. Beachtet man ferner die Beziehung $n+m=-1$ zwischen den Parametern n und m der zueinander dualen Oktaeder 1 (Parameter n) und 2 (Parameter m), so läßt sich $2n+1$ auch als $n-m$ schreiben. Berücksichtigt man schließlich auch noch, dass sich (vgl. die Vorüberlegungen zu Satz 2!) beide Oktaeder aus einem Würfel der Seitenlänge $2(n^2+n+1)$ ableiten und somit die Seitenlänge $s := \sqrt{2}(n^2+n+1)$ aufweisen, führt dies zu folgender Formulierung von

Satz 3. Wendet man auf das Oktaeder 1 aus Satz 2 die "Dualabbildung" an (d.h. man unterwirft den das Oktaeder generierenden Parameter n der affin-linearen Transformation $n \mapsto m = -n-1$), so entsteht ein Oktaeder 2, welches aus dem Oktaeder 1 durch eine Drehung um die Trägergerade der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der Dreiecke $\Delta A_1B_1F_1$ und $\Delta C_1D_1E_1$ um den via $\boxed{\cos\lambda = 1 - 3 \cdot \left(\frac{n-m}{s}\right)^2}$ definierten Winkel λ hervorgeht, wobei s die gemeinsame Seitenlänge des dualen Oktaederpaars bezeichnet.

Ausblick

Was es (z.B. für Schüler im GZ-Unterricht bzw. im Wahlpflichtfach Mathematik) noch zu entdecken gäbe (den Umfang dieses Artikels aber sprengen würde!):

- Wie anhand Fig. 2 ersichtlich, gilt (z.B.!) $\overrightarrow{S_{\Delta ABF}A_1}+\overrightarrow{S_{\Delta CDE}C_1}=\vec{o}$, was sich mutatis mutandis auch bei anderen "geeignet zueinander passenden" Vektoren zeigt.

- Ein Eindruck, den man schon anhand der dualen Oktaeder im Euklid-Anhang gewinnt, läßt sich auch allgemein beweisen: Der Grundriss/Aufriss des Oktaeders ist zum Aufriss/Grundriss des dualen Oktaeders kongruent (Lagegleichheit wird durch Verschiebung längs eines Ordners der zugeordneten Hauptrisse hergestellt, vgl. zur anschaulichen Transparenz abermals den Anhang!), wenngleich die Punkte A_i und B_i sowie die Punkte C_i und D_i vertauscht werden.

- Eine Kurvendiskussion der Funktion f mit $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ zeigt $W_f=[-\alpha;\alpha]$ mit $\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, woraus $W_g=[-1;1]$ für die Funktion g mit $g(x)=1-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)^2$ [vgl. (**)!] folgt (a posteriori-Absicherung!).

- Löst man $(**)$ bei festem λ nach n auf, so erhält man zwei quadratische Gleichungen mit den Lösungsmengen $L_1=\{n_1,n_2\}$ und $L_2=\{n_3,n_4\}$. Bei geeigneter Numerierung der Indizes gilt dann $n_1+n_3=-1$ sowie $n_2+n_4=-1$, was auf zwei Paare dualer Oktaeder führt (für jeden Drehsinn von λ ein Paar!).

- Spezialfälle für λ:
  - $\lambda=0^\circ \quad\Leftrightarrow\quad \cos\lambda=1$ (Bereits bekannt: $n=-\frac{1}{2}$, $\surd$)
    Hier ist die Dualabbildung die Identität ("absolut duales Oktaeder").
  - $\lambda=90^\circ \quad\Leftrightarrow\quad \cos\lambda=0$:
    Führt auf vier Lösungen mit $2\cdot n_i\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]\cup\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$.
  - $\lambda=180^\circ\Leftrightarrow\cos\lambda=-1$:
    Führt nur auf zwei Lösungen mit $2\cdot n_i\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ (klar, weil der Drehsinn hier keine Rolle spielt, da aus der Drehung um a eine Spiegelung an a wird).
  - $\lambda=120^\circ \quad\Leftrightarrow\quad \cos\lambda=-\frac{1}{2}$:
    Führt für n auf die einfachen Lösungen -2, -1, 0 und 1, welche aufgrund der besonderen Geometrie des gleichseitigen Dreiecks die Eckpunkte bei der Drehung lediglich permutieren lassen, d.h. hier ist das Oktaeder jeweils selbst-dual, wobei die Dualabbildung aber (anders als bei $\lambda=0^\circ$) eben nicht die Identität ist!

Literatur:

[1] Bröcker, Theodor (2003): Lineare Algebra und
Analytische Geometrie. Birkhäuser Verlag, Basel.

[2] Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al. (1992^3): Zahlen. Springer Verlag, Berlin.

[3] Götz, Stefan et al. (2005): Mathematik Lehrbuch 6. öbv&hpt, Wien.

[4] Koecher, Max (1992^3): Lineare Algebra und
Analytische Geometrie. Springer Verlag, Berlin.

[5] Pillwein, Gerhard et al. (1991): Darstellende Geometrie für die 7. Klasse AHS. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

[6] Reichel, Hans-Christian et al. (1992^2): Lehrbuch
der Mathematik 7. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

[7] Taschner, Rudolf (1999): Mathematik 2. Übungs- und
Lehrbuch für die 6. Klasse AHS. R. Oldenbourg Verlag, Wien.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Robert Resel

GRgORg 22

Heustadelgasse 4

A-1220 Wien

e-m@il: robert.resel@chello.at

Schulhomepage: http://www.heustadelgasse.at/typolino/